32

Exercice 1 : $f : E \to F$ application linéaire. Montrer que

1/ $\ker f$ est un s-e-v de E — 2/ f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

3/ $\mathrm{Im} f$ est un s-e-v de F — 4/ f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$

5/ Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est linéaire

Exercice 2 : $f : E \to F$ application linéaire. $B = \{v_1, v_2, \dots v_p\}$ famille de vecteurs de E. Montrer que :

i/ Si f est injective et B est libre alors $f(B) = \{f(v_1); f(v_2) \dots, f(v_p)\}$ est libre dans F

ii/ Si f est surjective et B est génératrice alors $f(B)$ est génératrice dans F

iii/ Si f est bijective et B est base alors $f(B)$ est base de F

Exercice 3 E et F 2 espaces vectoriels et $\dim E = n$ et $B = (v_1, \dots, v_n)$ base de E

Montrer que pour toute famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire unique ϕ de E vers F telle que $\phi(v_i) = v_i$; $\forall 1 \le i \le n$

Exercice 4 E et F ; 2 espaces vectoriels de dimension finie et f application linéaire de E vers F. Montrer que $\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$

Exercice 5 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = (z+y-x, x+y)$

a/ Montrer que f est une application linéaire

b/ Déterminer $\ker f$, f est-elle injective ?

c/ Déterminer $\mathrm{Im} f$, f est-elle surjective ?

Exercice 6 f application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que

$f(e_1) = (1,1,1)$ $\quad f(e_2) = (1,-1,0)$ $\quad f(e_3) = (0,2,1)$

(e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$

a/ Calculer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

b/ Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ et montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$

Exercice 7 Déterminer dans chaque cas le noyau et l'image des applications linéaires f suivantes puis examiner si $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires

a/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (y,x)$

b/ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = (x,x)$

c/ $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ $\quad f(P) = P + (x-1)P'$

$\mathbb{R}_3[x]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes de degré ≤ 3

ETUDUP .com

Exercice 8 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$: $f(x,y,z,t) = x - y + z - t$

a/ Vérifier que f est linéaire

b/ Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. f est-elle injective ? surjective ?

c/ En déduire que $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$

Exercice 9 Montrer qu'il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$f((1,0,0)) = (1,1,0)$; $f((0,1,0)) = (1,-1,0)$; $f((0,0,1)) = (1,0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Comment choisir λ pour que f soit injective ? surjective ?

Exercice 10 Trouver une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dont l'image soit engendrée par $(1,2,0,-4)$ et $(2,0,-1,-3)$

Exercice 11 E espace vectoriel, f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$f \circ f - 3f + 2 I_E = 0 \quad ; \quad I_E : \begin{matrix} E \to E \\ x \mapsto x \end{matrix}$$

1/ Montrer que :

a/ $\operatorname{Im}(f - 2I_E) \subset \ker(f - I_E)$ b/ $\operatorname{Im}(f - I_E) \subset \ker(f - 2I_E)$

2/ Soit $E_1 = \ker(f - I_E)$ et $E_2 = \ker(f - 2I_E)$

a/ Montrer que $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$

b/ En remarquant que $\forall v \in E$: $v = (f(v) - v) - (f(v) - 2v)$; montrer que $E = E_1 \oplus E_2$

Exercice 12 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ application linéaire définie par :

$$f(x,y,z) = (x + 3z, x + 4y - 5z, -2x + y - 8z, 3x + 5y - z)$$

1/ Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

2/ a/ Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et le rang de f. f est elle surjective ?

b/ Déterminer une base de $\ker f$ et sa dimension. f est-elle injective ?

3/ $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / 9a - b + 4c = 0 \text{ et } 7a + 5b - 4d = 0\}$

Montrer que : $\operatorname{Im} f \subset G$ puis que $\operatorname{Im} f = G$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c,d) pour que $f^{-1}((a,b,c,d))$ soit non vide

4/ $V_1 = (1,1,-2,3)$; $V_2 = (-1,3,3,2)$, déterminer des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, U_1 et U_2 tels que $f(U_1) = V_1$ et $f(U_2) = V_2$. Montrer que $\operatorname{Vect}(U_1,U_2)$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 13 E espace vectoriel de dimension 3, (e_1,e_2,e_3) base de E.

On définit l'endomorphisme f de E par : $f(e_1) = e_2$; $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$

a/ Montrer que : $f^3 = Id$

b/ On pose $E_1 = \ker(f - Id)$ et $E_2 = \ker(f^2 + f + Id)$

Déterminer une base de E_1 et une base de E_2

Montrer que : $E = E_1 \oplus E_2$.

ETUDUP .com

Exercice 1 :

1/ $\ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E$

- $f(0_E) = 0_F \Rightarrow 0_E \in \ker f \Rightarrow \ker f \neq \emptyset$
- Soit x_1, x_2 de $\ker f$ alors $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$
  d'où $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in \ker f$
- Soit $x_1 \in \ker f$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha x_1) = \alpha f(x_1) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x_1 \in \ker f$

2/ * f injective $\Rightarrow \ker f = \{0\}$
- $0 \in \ker f \Rightarrow \{0\} \subset \ker f$
- Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = 0$ d'où $f(x) = f(0)$
  f injective $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \in \{0\} \Rightarrow \ker f \subset \{0\}$ d'où $\ker f = \{0\}$

* $\ker f = \{0\} \Rightarrow f$ injective
Soit x_1, x_2 de E / $f(x_1) = f(x_2)$ alors $f(x_1) - f(x_2) = 0$; $f(x_1 - x_2) = 0$
$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

3/ $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) ; x \in E\} = \{y \in F ; \exists x \in E ; y = f(x)\} \subset F$
- $0_F \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f \neq \emptyset$
- Soient y_1, y_2 de $\operatorname{Im} f$ donc $\exists x_1, x_2$ de E ; $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$
  on a $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \operatorname{Im} f$
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $\alpha y_1 = \alpha f(x_1) = f(\alpha x_1) \in \operatorname{Im} f$

4/. $\operatorname{Im} f \subset F$ evident
- f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F \ \exists x \in E ; y = f(x) \Leftrightarrow \forall y \in F : y \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow F \subset \operatorname{Im} f$

5/ f isomorphisme = f linéaire et bijective ; $f^{-1} : F \longrightarrow E$
Soit y_1, y_2 2 elements de F alors $\exists x_1, x_2 \in E$: $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$
alors : $f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$
$\alpha \in \mathbb{R}$: $f^{-1}(\alpha y_1) = f^{-1}(\alpha f(x_1)) = f^{-1}(f(\alpha x_1)) = \alpha x_1 = \alpha f^{-1}(y_1)$

Exercice 2
i/ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de $\mathbb{R}$: $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_p f(v_p) = 0$ alors
$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p) = f(0)$
f est injective $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0$;
$\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ libre $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$

ii/ Soit $y' \in F$, f est surjective donc $\exists x' \in E$ / $f(x') = y'$
$\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ generatrice de $E \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ / $x' = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p$
d'où $y' = f(x') = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_p f(v_p)$
$\Rightarrow \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)\}$ generatrice de F

ETUDUP .com

iii/ Conséquence de i/ et ii/

ETUDUP .com

Exercice 3

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E alors $\forall x \in E : \exists! \alpha_i \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$

On considère l'application ϕ définie sur E par : $\forall x \in E : \phi(x) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

- ϕ est linéaire : Soit $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ et $y = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$ 2 éléments de E

alors $\phi(x+y) = \phi((\alpha_1+\beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)u_n) = (\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)u_n$

$= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \phi(x) + \phi(y)$

et $\phi(\lambda x) = \phi(\lambda\alpha_1 u_1 + \lambda\alpha_2 u_2 + \dots + \lambda\alpha_n u_n) = \lambda\alpha_1 v_1 + \lambda\alpha_2 v_2 + \dots + \lambda\alpha_n v_n = \lambda\,\phi(x)$

- ϕ vérifie bien : $\phi(u_i) = v_i$ car $f(u_i) = f(0.u_1 + 0.u_2 + \dots + 1.u_i + \dots + 0.u_n) = 1.v_i = v_i$
- Soit Ψ une autre application linéaire de E vers F qui vérifie : $\forall i = 1, \dots, n : \Psi(u_i) = v_i$

alors $\forall x \in E : \Psi(x) = \Psi(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \phi(x) \Rightarrow \Psi = \phi$

d'où l'unicité de ϕ

Exercice 4 Soit $n = \dim E$ et $p = \dim \ker f$ et $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ base de $\ker f$

D'après le théorème de la base incomplète $B = B_1 \cup B_2$ où $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-p}\}$ est une base de E

Soit $y \in f(E) = \operatorname{Im} f$ alors $\exists x \in E / \quad y = f(x)$

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n / \quad x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} v_1 + \lambda_{p+2} v_2 + \dots + \lambda_n v_{n-p}$

alors $y = f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p) + \lambda_{p+1} f(v_1) + \lambda_{p+2} f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_{n-p})$

or $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_p) = 0 \Rightarrow y = f(x) = \lambda_{p+1} f(v_1) + \lambda_{p+2} f(v_2) + \dots + \lambda_n f(v_{n-p})$

d'où $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_{n-p})\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$

Montrons que cette famille est libre.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-p} \in \mathbb{R} / \quad \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \dots + \lambda_{n-p} f(v_{n-p}) = 0$

$\Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-p} v_{n-p}) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-p} v_{n-p} \in \ker f$

d'où $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} / \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-p} v_{n-p} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$

car $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-p} v_{n-p} - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \dots - \alpha_n u_n = 0$

Comme B est une base dans E alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-p} = -\alpha_1 = -\alpha_2 = \dots = -\alpha_n = 0$

d'où la famille est libre et donc base dans $\operatorname{Im} f$

Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = n - p = \dim E - \dim \ker f$

$\Rightarrow \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

et encore plus..